МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Для всех специальностей первого курса

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

УРАВНЕНИЯ

по дисциплине

«МАТЕМАТИКА»

Братск 2019

Содержание

Введение

Уравнения - составная часть математики для студентов первого курса технического или естественнонаучного направления. Хорошие знания и прочные навыки по решению уравнений являются свидетельством достаточного уровня математической культуры, непременным условием успешного изучения в дальнейшем математики, физики, ряда технических дисциплин.

Настоящее пособие имеет целью помочь учащимся в повышении уровня их знаний по решению уравнений от самых простых до более сложных.

В данном пособии представлены основные виды уравнений, такие как квадратные, дробно – рациональные, иррациональные, логарифмические, показательные, тригонометрические.

Пособие состоит из 6 разделов, каждый из которых содержит лаконично изложенные теоретические сведения, сопровождаемые разобранными примерами. Для закрепления предлагаются различные по смыслу и сложности упражнения.

Материалы пособия могут быть использованы на занятиях преподавателями и студентами первого курса в качестве обучающего пособия. В зависимости от направления подготовки преподаватель имеет возможность рассматривать более сложные или несложные задачи. Упражнения начинаются с простых заданий к более сложным заданиям. Разобранные примеры позволяют студентам изучать разделы самостоятельно.

1 Решение квадратных уравнений

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, с коэффициентами a, b, c и переменной x, называется квадратным уравнением или уравнением второй степени.

Коэффициенты a, b, c - любые действительные числа: a – старший коэффициент, b – второй коэффициент, c – свободный член.

Если $a = 1$, то уравнение называют приведённым, если $a \neq 1$, то – неприведённым.

Если $b = 0$ или/и $c = 0$ то уравнение называют неполным.

Корнем квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ называют всякое значение переменной x, при котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в 0.

Решить квадратное уравнение – значит, найти все его корни или установить, что действительных корней нет.

Если квадратное уравнение имеет действительные корни, то максимум их два.

Алгоритм решения полного квадратного уравнения:

1) преобразовать уравнение второй степени к стандартному виду $ax^2 + bx + c = 0$ (избавиться от дробей, раскрыть скобки, перенести все значения в левую часть);

2) вычислить корни по формулам:

$$D = b^2 - 4ac, \qquad (1)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad (2)$$

где a, b, c – коэффициенты;

D – дискриминант;

$x_{1,2}$ – корни уравнения.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня, если $D = 0$, то уравнение имеет один действительный корень, если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 8x + 12 = 0$.

Выпишем коэффициенты для уравнения и найдем дискриминант: $a = 1$, $b = -8$, $c = 12$;
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$;

$D > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет два корня. Найдем их:

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 3; \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -1$$

Ответ: -1; 3.

Алгоритм решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx = 0$:

Квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ решается путём разложения на линейные множители $x(ax + b) = 0$, приравнивания каждого множителя к нулю и решения совокупности двух уравнений $x = 0$ и $ax + b = 0$.

Пример 2. Решить уравнение

2x(x-2)=0

$$\left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$$

Ответ: 0; 2.

Алгоритм решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + c = 0$:

1) преобразовать уравнение к виду:

$$x^2 = -\frac{c}{a};$$

2) найти корни по формуле:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)}.$$

Пример 3. Решить уравнение.

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x_1 = 2{,}5; \; x_2 = -2{,}5$$

Ответ: -2,5; 2,5.

Решением неполного квадратного уравнения вида $ax^2 = 0$ является один действительный корень $x = 0$.

Решение квадратных уравнений с помощью теоремы Виета.

Теорема Виета: сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$,

где a=1, тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}$

Используя теорему Виета были выражены сумма и произведение корней произвольного квадратного уравнения.

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Примеры решения заданий с использованием теоремы Виета.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 + 4x + 3 = 0$.

По формулам теоремы Виета для приведённого квадратного уравнения подберём корни x = -3 и x = -1;

проверим: $(-3)^2 + 4 * (-3) + 3 = 0$ и $(-1)^2 + 4 * (-1) + 3 = 0$.

Ответ: -3; -1.

Пример 5. Один из корней уравнения $5x^2 + bx + 24 = 0$ равен 8. Найти другой корень и коэффициент b.

Составим и решим систему согласно сумме и произведению корней для любого квадратного уравнения:

$$\begin{cases} 8 + x_2 = -\frac{b}{5} \\ 8 \cdot x_2 = \frac{24}{5} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = -40 - 5x_2 \\ x_2 = \frac{3}{5} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = -43 \\ x_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Ответ: второй корень равен 3/5, коэффициент b равен -43.

Уравнения высших степеней, решение биквадратного уравнения.

Биквадратным уравнением называется уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Решается такое уравнение заменой $x^2 = y$ и переходу к обычному квадратному уравнению.

Пример 6. Решить уравнение $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

$x_2 = y$

$y^2 - 29y + 100 = 0$

$D = 441$

$y_{1,2} = \frac{29 \pm 21}{2}$

$\left[\begin{array}{l} y_1 = 4 \\ y_2 = 25 \end{array}\right.$

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 2 \\ x_{3,4} = \pm 5 \end{array}\right.$

Ответ: -2; -5; 2; 5.

2 Решение дробно-рациональных уравнений

Дробные уравнения, содержащие и в числителях, и в знаменателях многочлены с неизвестной, называются дробно-рациональными.

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений:

1) перенести все дроби и члены уравнения в левую часть;

2) привести левую часть уравнения к общему знаменателю;

3) разбить исходное уравнение на два: числитель приравнять к нулю, знаменатель поставить в условие неравенства нулю.

Пример 1.Найдите корень уравнения:

$$\frac{x-41}{x-5}=3$$

Отметим, что x не равен пяти (обращает знаменатель в ноль). Умножим обе части уравнения на (x – 5):

$$\frac{x-41}{x-5}=3 \quad |\cdot(x-5)$$

$$x-41=3(x-5)$$

$$x-41=3x-15$$

$$x-3x=41-15$$

$$-2x=26$$

$$x=-13$$

Сделаем проверку:

$$\frac{-13-41}{-13-5}=3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-54}{-18}=3 \quad \Rightarrow \quad 3=3 \quad \text{Верно}$$

Ответ: –13

Пример 2. Найдите корень уравнения:

$$x=\frac{9x-20}{x+18}$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Сразу отметим, что x ≠ 18, так как при x = – 18 знаменатель обращается в ноль, а на ноль делить нельзя. Умножим обе части на (x+18):

$$x = \frac{9x - 20}{x + 18} \qquad |\cdot (x + 18)$$

$$x(x + 18) = 9x - 20$$

$$x^2 + 18x = 9x - 20$$

$$x^2 + 18x - 9x + 20 = 0$$

$$x^2 + 9x + 20 = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$D = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

Больший из них – 4.

Сделаем проверку (проверяем оба корня):

$$-4 = \frac{9 \cdot (-4) - 20}{-4 + 18} \quad \Rightarrow \quad -4 = \frac{-56}{14} \quad \Rightarrow \quad -4 = -4 \quad \text{Верно}$$

$$-5 = \frac{9 \cdot (-5) - 20}{-5 + 18} \quad \Rightarrow \quad -5 = \frac{-65}{13} \quad \Rightarrow \quad -5 = -5 \quad \text{Верно}$$

Ответ: – 4

Пример 3. Найдите корень уравнения:

$$\frac{x + 5}{7x + 11} = \frac{x + 5}{6x + 1}$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Умножим обе части на (7x + 11)(6x + 1), получим:

$$\frac{x + 5}{7x + 11} = \frac{x + 5}{6x + 1} \qquad |\cdot (7x + 11)(6x + 1)$$

$$(x + 5)(6x + 1) = (x + 5)(7x + 11)$$

$$6x^2 + x + 30x + 5 = 7x^2 + 11x + 35x + 55$$

$$6x^2 + x + 30x + 5 - 7x^2 - 11x - 35x - 55 = 0$$

Сокращаем подобные члены, получим $-x^2 - 15x - 50 = 0$

Умножаем обе части на –1:

$$x^2 + 15x + 50 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 15 \quad c = 50$$

$$D = b^2 - 4ac = 15^2 - 4 \cdot 1 \cdot 50 = 225 - 200 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-15 + 5}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-15 - 5}{2} = -10$$

Больший из корней равен – 5.
Проверка (проверяем оба корня):

$$\frac{-5 + 5}{7 \cdot (-5) + 11} = \frac{-5 + 5}{6 \cdot (-5) + 1} \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{Верно}$$

$$\frac{-10 + 5}{7 \cdot (-10) + 11} = \frac{-10 + 5}{6 \cdot (-10) + 1} \Rightarrow \frac{-5}{-59} = \frac{-5}{-59} \quad \text{Верно}$$

Ответ: – 5

Пример 4. Найдите корень уравнения:

$$\frac{-x^2 + 3x - 2}{x(x^2 + 2)} = 0$$

$$\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 = 0 \\ x\left(x^2 + 2\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1; x_2 = 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: 1; 2.

Пример 5. Найдите корень уравнения:

$$\begin{cases} 3y\left(y - 4\right) = 0 \\ y\left(y - 2\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0; y = 4 \\ y \neq 0; y \neq 2 \end{cases}$$

Ответ: 4.

Пример 6. Найдите корень уравнения:

$$\begin{cases}(2y+1)^2 = (2y+3)(y+2) \\ y \neq 1{,}5\end{cases}$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$$

$$y_1 = 2{,}5; y_2 = -1$$

Ответ: -1; 2,5.

Задания для проверочной работы

Задания на 1 балл.

Решите уравнения:

1) $\frac{5}{2x+3} = \frac{4}{7}$;

2) $\frac{x+9}{3} - \frac{x-1}{5} = 2.$;

3) $\frac{x-4}{x+4} = 5.$;

4) $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x-4}$;

5) $\frac{(x-2)(x+3)}{x-3} = 0.$;

6) $\frac{1}{7x} - \frac{67}{7} = \frac{3}{x} - 1.$;

7) $\frac{5}{9z} - \frac{53}{9} = \frac{2}{z} - 3$;

8) $\frac{2x+5}{3x-1} = 6$;

9) $\frac{3z-4}{2z+3}$ =4.

Задания на 2балла.
Решите уравнения:

1) $\frac{x^2-7x+12}{x-3}=0$;

2) $\frac{x^2+6x+8}{x+4}=0$;

3) $\frac{(x+3)(x-2)}{x^2-4}=0$;

4) $\frac{y^2-25}{4y+25}=0$;

5) $\frac{y^2-9}{4y+12}=0$;

6) $\frac{(x+3)(x-2)}{2x^2+5x-3}=0$;

7) $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x}{x+5}=\frac{50}{x^2-25}$;

8) $\frac{2}{3x+1}-\frac{x}{1-3x}=\frac{2x}{9x^2-1}$;

9) $\frac{16}{x^2+x}-\frac{6}{x^2-x}=\frac{1}{x}$;

10) $\frac{1}{x+6}+\frac{2}{x-2}=\frac{2}{x-6}$.

Задания на 4 балла.
Решите уравнение:

1) $\frac{4x+8}{x^2-4}+2x+5=0$;

2) $\frac{2-x}{x^2+3x}+\frac{6}{x^2-9}=\frac{1}{x-3}$;

3) $\frac{2}{x^2+10x+25}-\frac{10}{25-x^2}=\frac{1}{x-5}$;

4) $\frac{3(3x+1)-4(5x+1)}{2(2x-1)+5(0,2-3x)}=1$;

5) $\frac{2(x-2)+3(4x-15)}{2(2x-7)-3(7-2x)}=2$;

6) $\frac{(3x-1)^2+(4x+3)^2}{(5x+2)^2-4}=1$.

Задания на 6 баллов.
Решите уравнение:

1) $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$;

2) $\left(\frac{x^2+12}{9-x^2}\right)^2-\left(\frac{7x}{x^2-9}\right)^2=0$;

3) $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$;

4) $\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}=5$;

5) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$;

6) $\frac{12}{(x+1)(x+5)}+\frac{15}{(x+2)(x+4)}=2$.;

7) $\frac{x^2}{x^2+27}-\frac{4}{x^2+7}=0$;

8) $\frac{3x+2}{2x+3}+\frac{2x+3}{3x+2}=-2$;

9) $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$;

10) $\frac{5}{x^2+2x+4}=\frac{1}{x-2}-\frac{4x+4}{x^3-8}$.

3 Решение иррациональных уравнений

Решение иррациональных уравнений обычно сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путем возведения в степень n обеих частей уравнения.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1) если показатель корня – четное число, то подкоренное выражение и значение корня не должны быть отрицательными;
2) если показатель корня – нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом;
3) при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут возникать посторонние корни, поэтому при использовании данного метода необходимо делать проверку или находить область допустимых значений.

Примеры:

1. Решить уравнение: $\sqrt[4]{3x-2}=2$

Решение:

ОДЗ.

$3x-2\geq0$

$3x\geq2$ / : 3

$x\geq2/3$

Возведём обе части уравнения в четвёртую степень.

$3x-2=16$

$3x=16+2$

$3x=18$

$x=6\in$ ОДЗ

Ответ: $x=6$

2. Решить уравнение: $\sqrt{x^2-24}=1$

Решение: Возведем обе части уравнения в квадрат.

$x^2-24=1$

$x^2=24+1$

$x^2=25$

Полученное неполное квадратное уравнение имеет два корня −5 и 5. Произведем проверку полученных корней, для этого подставим значения переменной x в исходное уравнение.

Проверка.

При $x_1=-5$ $\sqrt{(-5)^2-24}=\sqrt{25-24}=1$ - верно

При $x_2=5$ $\sqrt{5^2-24}=1$ 1 - верно.

Значит, исходное иррациональное уравнение имеет два корня

Ответ: −5 и 5.

3. Решить уравнение: $\sqrt[3]{5x+7}=-2$

Решение: Возведём обе части уравнения в куб.
$5x+7=-8$
$5x=-8-7$
$5x=-15$
$x=-3$
Ответ: $x=-3$

4. Решить уравнение: $\sqrt[3]{x} = \sqrt{x-4}$

Возводя обе части уравнения в шестую степень получим

$x^2 = (x - 4)^3$
или
$x^3 - 13x^2 + 48x - 64 = 0$,
откуда, удобно группируя,
$(x^3 - 8x^2) - (5x^2 - 40x) + (8x - 64) = 0$,
получим
$x^2(x - 8) - 5x(x - 8) + 8(x - 8) = 0$,
или
$(x - 8)(x^2 - 5x + 8) = 0$.
Последнее уравнение равносильно совокупности
$x-8=0$ или $(x^2 - 5x + 8) = 0$.
откуда $x = 8$. Проверкой убеждаемся, что $x = 8$ удовлетворяет исходному уравнению.
Ответ: $x=8$

5. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 - 9x + 25} = 2x - 13$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем квадратное уравнение

$x^2 - 9x + 25 = 4x^2 - 52x + 169$,
или
$3x^2 - 43x + 144 = 0$, решения которого $x_1 = 9$ и $x_2 = {}^{16}/_3$. После проверки остается лишь $x = 9$.
Ответ: $x=9$

6. Решить уравнение: $\sqrt{3-x} + \sqrt{6+x} = 3$

Перепишем уравнение в виде

$\sqrt{6+x} = 3 - \sqrt{3-x}$,

и возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$6 + x = 9 - 6\sqrt{3-x} + 3 - x$.

Опять отделим один корень

$6\sqrt{3-x}=6-2x$,

или

$3\sqrt{3-x}=3-x$,

и возводя в квадрат, получим уравнение

$9(3 - x) = (3 - x)^2$, корни которого $x = 3$ и $x = -6$.

Проверкой убеждаемся, что оба значения удовлетворяют исходному уравнению.

Задания для проверочной работы.

Вариант 1

Найдите корни уравнения:

1) $\sqrt{x+2}=4$;
2) $\sqrt{x-6}=\sqrt{x+12}$;
3) $\sqrt{x+25}=x+5$;
4) $\sqrt{2x^2-6x+9}=\sqrt{2x^2+3x-18}$;
5) $\sqrt{9x^2-5x+2}=\sqrt{8x^2-3x+17}$;
6) $3x+4=\sqrt{8x^2+22x+15}$;
7) $\sqrt{(x-8)^2}=8-x$;
8) $(x+2)\sqrt{x+1}=0$;
9) $(x^2-100)\sqrt{1-27x}=0$;
10) $(x+16)\sqrt{x^2+2x+4}=2x+32$.

Вариант 2

Найдите корни уравнения:

1) $\sqrt{3x+1}=17$;
2) $\sqrt{12x+9}=\sqrt{12x-7}$;
3) $\sqrt{x+16}=x-4$;
4) $\sqrt{0,7x^2-2x+3}=\sqrt{0,7x^2+x-6}$;
5) $\sqrt{3x^2-3x+1}=\sqrt{2x^2-x+16}$;
6) $x+3=\sqrt{2x^2+18}$;
7) $\sqrt{(x-15)^2}=15-x$;
8) $(x-24)\sqrt{x-36}=0$;
9) $(x^2-121)\sqrt{1-11x}=0$;
10) $(x+7)\sqrt{x^2+3x+7}=2x+14$.

Вариант 3

Найдите корни уравнения:

1) $\sqrt{3x+10}=5$;

2) $\sqrt{0{,}3x-1}=\sqrt{0{,}3x+2}$;

3) $\sqrt{x+49}=x+7$;

4) $\sqrt{19x^2-18x+27}=\sqrt{19x^2+9x-54}$;

5) $\sqrt{22x^2+5x+2}=\sqrt{21x^2+3x+17}$;

6) $5x+2=\sqrt{30x+3}$;

7) $\sqrt{(x-19)^2}=19-x$;

8) $(x+10)\sqrt{x+9}=0$;

9) $(x^2-144)\sqrt{1-12x}=0$;

10) $(x+15)\sqrt{x^2+2x+4}=2x+30$.

Вариант 4

Найдите корни уравнения:

1) $\sqrt{9x-2}=4$;

2) $\sqrt{18x+36}=\sqrt{18x-9}$;

3) $\sqrt{x+100}=x-10$;

4) $\sqrt{0{,}57x^2-25x+3}=\sqrt{0{,}57x^2+25x+53}$;

5) $\sqrt{20x^2-9x-26}=\sqrt{19x^2-4x-2}$;

6) $2x+3=\sqrt{3x^2-27}$;

7) $\sqrt{(x-90)^2}=90-x$;

8) $(x-27)\sqrt{x-87}=0$;

9) $(x^2-196)\sqrt{1-14x}=0$;

10) $(x+13)\sqrt{x^2+6x+13}=2x+26$.

4 Решение логарифмических уравнений

4.1 Решение логарифмических уравнений по определению логарифма

Уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма (в основании логарифма), называютсялогарифмическими.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение

$\log_a x = b$, где основание a>1,a≠1, а выражение, стоящее под знаком логарифма, x>0.

Для любого действительного b это уравнение имеет единственное решение $x=a^b$

Пример 1:

Решить уравнение

$\log_2 x = 3$

Решение.

Вначале находим область допустимых значений (ОДЗ): x>0, так как под знаком логарифма должно быть положительное выражение.

Для решения данного уравнения, достаточно воспользоватьсяопределением логарифма, то есть представить число x как степень основания 2 логарифма, причем показатель степени равен 3.

$\log_2 x = 3$

$x = 2^3$

x=8

Найденное значение принадлежит ОДЗ, значит, является корнем уравнения.

Ответ: x=8

Пример 2:

Решить уравнение $\log_3 x^2 + 72 = 4$

Решение.

ОДЗ: $x^2 + 72 > 0$ ⇒x∈R

По определению логарифма получаем

$x^2 + 72 = 3^4$

$x^2 + 72 = 81$

$x^2 + 72 - 81 = 0$

$x^2 - 9 = 0$

$(x - 3)(x + 3) = 0$

$x_1 = 3, x_2 = -3$

Ответ:

$x_1 = 3, x_2 = -3$

Пример 3:

Решить уравнение: lg(x+1)+lg(x+4)=1.

Решение.

Находим ОДЗ:

x+1>0 x+4>0

x>−1 x>−4

x∈(−1;+∞)

По свойству логарифма преобразуем левую часть

lg(x+1)(x+4)=1

lg(x+1)(x+4)=lg10

(x+1)(x+4)=10

$x^2 + 5x + 4 = 10$

$x^2 + 5x + 4 - 10 = 0$

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$x_1 = -6, x_2 = 1$

x=−6 не является корнем этого уравнения, так как не принадлежит ОДЗ.

Ответ: x=1

4.2 Потенцирование

Решение логарифмических уравнений типа $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ сводится к решению уравнения f(x)=g(x).

Это следует из монотонности логарифмической функции.

Потенцирование – это переход от уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению f(x)=g(x), где a - отличное от единицы положительное число,

f(x) и g(x) - элементарные алгебраические функции, f(x)>0,g(x)>0.

Для решения рассматриваемого типа уравнений достаточно найти все решения уравнения f(x)=g(x) и среди полученных, выбрать те, которые принадлежат ОДЗ уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

В случае, если уравнение f(x)=g(x) решений не имеет, то их не имеет и исходное логарифмическое уравнение.

Пример 4:

Решим уравнение: $\log_5(x + 1) = \log_5(2x - 3)$

Решение.

Находим ОДЗ:

x+1>0 2x−3>0

x>−1 2x>3

x>1,5⇒x∈(1,5;+∞)

Решаем уравнение

x+1=2x−3

x−2x=−3−1

−x=−4

x=4 принадлежит интервалу x∈(1,5;+∞), значит, является корнем исходного логарифмического уравнения.

Ответ: x=4

Пример 5:

Решим уравнение

Решение.

ОДЗ:

$x+4>0$ $2x+3>0$ $1-2x>0$

$x>-4$ $2x>-3$ $-2x>-1$

$x>-4$ $x>-1{,}5$ $x<0{,}5$ $\Rightarrow x\in(-1{,}5;0{,}5)$

$\log_{0,7}(x+4)(2x+3)=\log_{0,7}(1-2x)$

$(x+4)(2x+3)=1-2x$

$2x^2+8x+3x+12=1-2x$

$2x^2+13x+11=0$

$x_1=-1, x_2=-5{,}5$

$x_1=-1\in$ОДЗ $x_2=-5{,}5\notin$ОДЗ значит, $-5{,}5$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=-1$

4.3Метод введения новой переменной

Уравнения вида f($\log_a x$)=0 решаются с помощью подстановки t=$\log_a x$,которая приводит уравнение к виду f(t)=0.

Если t – корень уравнения f(t)=0, то после возвращения к подстановке t=$\log_a x$, можно найти корень исходного логарифмического уравнения, то есть x=a^t (аналогично находятся и другие корни, если они есть).

Пример 6:

Решить уравнение:$log_2^2(x+4)=2\log_2(x+4)+3$

Решение:

ОДЗ:

$x+4>0$

$x>-4$

$x\in(-4\in;+\infty)$

Выполним замену: $\log_2(x+4)=t$

Уравнение свелось к виду: $t^2-2t-3=0$

Решая квадратное уравнение, получили два корня: $t_1=-1$, $t_2=3$

$\log_2(x+4)=-1$	$\log_2(x+4)=3$
$2^{-1}=x+4$	$2^3=x+4$
$0{,}5=x+4$	$8=x+4$
$0{,}5-4=x$	$8-4=x$
$x=-3{,}5$	$x=4$

$x=-3{,}5$ и $x=4$ оба принадлежат ОДЗ

Ответ: −3,5;4

Пример 7:

Решить уравнение :

Решение:

Обозначив $\log_4 x$=t, получим уравнение $2t^2-5t+2=0$.

Корни этого уравнения t_1=   ,t_2=2 .

Из уравнения $\log_4 x = \frac{1}{2}$находим, что $x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$, а из уравнения $\log_4 x = 2$, следует, что

Оба корня принадлежат ОДЗ:x>0.

Ответ: 2;16.

Пример 8:

Задание. Найти решение уравнения $\log_x(6 - x) = 2$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 6 - x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x > -6 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 6 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$x \in (0;1) \cup (1;6)$

Введем новую переменную:

$6-x=t$

$\log_x t = 2$

$x^2=t$

Вернемся к обозначенному

$x^2=6-x$

$x^2+x-6=0$

$x_1=-3, x_2=2$

Первый корень не принадлежит ОДЗ, а значит решением является x=2

Ответ: x=2

4.4Логарифмирование

Уравнения вида $2^x=3$,$x^{\log_3 x} - 2 = 27, x^{\log_3 x} = 4x$ решаются логарифмированием обеих частей уравнения.

Логарифмирование – это переход от уравнения f(x)=g(x) к уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Пример 9:

Решить уравнение $2^x=3$

Решение.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2

$\log_2 2^x = \log_2 3$

$x \log_2 2 = \log_2 3$ по формуле $\log_a b^r = r \log_a b$

$x \cdot 1 = \log_2 3$

Ответ: $x = \log_2 3$

Пример 10:

Решить уравнение: $x^{\log_3 x - 2} = 27$

Решение.

ОДЗ:

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

Прологарифмируем обе части по основанию 3

$\log_3 x^{\log_3 x - 2} = \log_3 27$

$(\log_3 x - 2)\log_3 x = 3$ по формуле $\log_a b^r = r \log_a b$

Пусть $\log_3 x = t$

$(t-2)\cdot t=3$

$t^2-2t-3=0$

$t_1=3,\ t_2=-1$

Вернемся к обозначенному

$\log_3 x = 3$ $\log 3=-1$

$x_1=3^3=27$ $x_2=3^{-1}=1/3$

Оба значения принадлежат ОДЗ.

Ответ:1/3;27

Задания для проверочной работы

Вариант 1

Найдите корни уравнения:

1) $\log_5(4+x) = 2$;
2) $\log_3(4-x) = 4$;
3) $\log_2(7+x) = 6$;
4) $\log_3(14-x) = \log_3 5$;
5) $\log_7(x+9) = \log_7(5x-7)$;
6) $\log_8(x+6) = \log_8(4x-9)$;
7) $\log_5(x+6) = \log_5(4x-3)$;
8) $\log_7(x+5) = \log_7(4x-7)$;
9) $\log_6(x+4) = \log_6(6x-6)$;
10) $\log_{\frac{1}{9}}(9-x) = -2$;
11) $\log_5(5-5x) = 2\log_5 2$;
12) $\log_2(12-6x) = 3\log_2 3$;

13) $\log_3(13-5x) = 2\log_3 2$;

14) $\log_{16} 2^{2x-4} = 4$;

15) $\log_{16} 2^{2x-7} = 3$;

16) $\log_8 2^{2x-5} = 2$;

17) $\log_4 2^{2x-7} = 3$;

18) $\log_4 2^{5x+7} = 4$;

19) $\log_{27} 3^{4x+3} = 3$;

20) $3^{\log_9 3x+6} = 6$;

21) $2^{\log_{16} 3x-3} = 3$;

22) $2^{\log_8 5x-4} = 3$;

23) $3^{\log_{81} 6x-3} = 3$;

24) $2^{\log_{16} 4x+1} = 5$;

25) $\log_8(x^2-4x) = \log_8(x^2+1)$;

26) $\log_7(x^2+2x) = \log_7(x^2+5)$;

27) $\log_8(x^2-4x) = \log_8(x^2+3)$;

28) $\log_5(x^2+4x) = \log_5(x^2+4)$;

29) $\log_9(x^2+5x) = \log_9(x^2+1)$;

30) $\log_8(x^2+2x) = \log_8(x^2-7)$;

31) $\log_4(x^2+5x) = \log_4(x^2+6)$;

32) $\log_2(x^2+2x) = \log_2(x^2+9)$;

33) $\log_4(3+5x) = \log_4(3+x)+1$;

34) $\log_3(2+x) = \log_3(1-3x)+2$;

35) $\log_4(8+5x) = \log_4(4+x)+1$;

36) $\log_2(7-x) = \log_2(1-x)+1$;

37) $\log_5(2+3x) = \log_5(2-x)+1$;

38) $\log_2(4+5x) = \log_2(1+4x)+2$;

39) $\log_2(8+7x) = \log_2(4+5x)+1$;

40) $\log_5(5-4x) = \log_5(1-4x)+1$;

41) $\log_4(7-2x) = \log_4(1-2x)+2$;

42) $\log_2(4+5x) = \log_2(1-x)+2$;

43) $\log_2(8-x) = \log_2(3-x)+1$;

44) $\log_3(7+2x) = \log_3(7-2x)+2$;

45) $\log_3(3+4x) = \log_3(1-6x)+1$;

46) $\log_3(7-2x) = \log_3(5-6x)+1$;

Вариант 2

Найдите корни уравнения:

1) $\log_3(9+x) = 4$;
2) $\log_2(3+x) = 5$;
3) $\log_2(15+x) = \log_2 3$;
4) $\log_{13}(17-x) = \log_{13} 12$;
5) $\log_8(x+9) = \log_8(2x-17)$;
6) $\log_8(x+6) = \log_8(3x-8)$;
7) $\log_8(x+5) = \log_8(2x-2)$;
8) $\log_7(x+5) = \log_7(5x-3)$;
9) $\log_2(x+4) = \log_2(2x-12)$;
10) $\log_{\frac{1}{3}}(10-x) = -2$;
11) $\log_2(18-6x) = 4\log_2 3$;
12) $\log_3(12-x) = 3\log_3 4$;
13) $\log_5(14-x) = 2\log_5 2$;
14) $\log_8 2^{6x-3} = 4$;
15) $\log_9 3^{2x-3} = 4$;
16) $\log_{16} 2^{5x+1} = 3$;
17) $\log_{81} 3^{2x-5} = 4$;
18) $\log_{16} 2^{2x+8} = 2$;
19) $\log_{81} 3^{2x+8} = 3$;
20) $2^{\log_8 5x-3} = 3$;
21) $2^{\log_4 2x+7} = 7$;
22) $3^{\log_9 2x+6} = 6$;
23) $3^{\log_{81} 5x+3} = 4$;
24) $2^{\log_4 5x+7} = 8$;
25) $\log_4(x^2+2x) = \log_4(x^2+9)$;
26) $\log_8(x^2+2x) = \log_8(x^2-8)$;
27) $\log_5(x^2+3x) = \log_5(x^2+3)$;
28) $\log_5(x^2+5x) = \log_5(x^2+9)$;
29) $\log_6(x^2+x) = \log_6(x^2+2)$;
30) $\log_7(x^2+x) = \log_7(x^2+5)$;
31) $\log_7(x^2+5x) = \log_7(x^2+5)$;
32) $\log_3(x^2+5x) = \log_3(x^2+4)$;
33) $\log_4(7+5x) = \log_4(3-5x)+1$;
34) $\log_3(4+5x) = \log_3(1-5x)+2$;

35) $\log_2(6+7x)=\log_2(5+x)+1$;

36) $\log_5(4+5x)=\log_5(2-3x)+1$;

37) $\log_2(1+6x)=\log_2(1-6x)+2$;

38) $\log_2(7+3x)=\log_2(6+x)+1$;

39) $\log_4(7+6x)=\log_4(5-x)+1$;

40) $\log_4(5+6x)=\log_4(3+5x)+1$;

41) $\log_4(4+5x)=\log_4(1+4x)+1$;

42) $\log_3(5+x)=\log_3(4-3x)+1$;

43) $\log_3(8-x)=\log_3(4-x)+1$;

44) $\log_5(5+4x)=\log_5(1+4x)+1$;

45) $\log_2(4-x)=\log_2(4-3x)+1$;

46) $\log_2(5+4x)=\log_2(1-4x)+1$.

5 Решение показательных уравнений

Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения показательных уравнений требуется знать и уметь использовать следующую несложную теорему:

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Помимо этого, полезно помнить об основных формулах и действиях со степенями, как показано в таблице 1.

Таблица 1 – Свойства степеней

$$\begin{array}{l}
a > 0,\, b > 0: \\
a^0 = 1,\, 1^x = 1; \\
a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}\ (k \in Z,\, n \in N); \\
a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \\
a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \\
\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \\
(a^x)^y = a^{xy}; \\
a^x \cdot b^x = (ab)^x; \\
\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.
\end{array}$$

5.1Приведение к одинаковому основанию

Пример 1. Решите уравнение: $4^{1-2x} = 64$.

Необходимо сделать так, чтобы в левой и правой частях были показательные выражения с одним основанием. 64 мы можем представить как 4 в степени 3. Получим:

$4^{1-2x} = 4^3$

Основания равны, можем приравнять показатели:

$1 - 2x = 3$

$-2x = 2$

$x = -1$

Проверка:

$4^{1-2(-1)} = 64$

$4^{1+2} = 64$

$4^3 = 64$

$64 = 64$

Ответ: –1

Пример 2. Решите уравнение: $3^{x-18} = 1/9$.

$$3^{x-18} = \frac{1}{3^2}$$

Известно, что

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Значит $3^{x-18} = 3^{-2}$

Основания равны, можем приравнять показатели:

$x - 18 = -2$

$x = 16$

Проверка:

$3^{16-18} = 1/9$

$3^{-2} = 1/9$

$1/9 = 1/9$

Ответ: 16

Пример 3. Решите уравнение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-19} = \frac{1}{64}$$

Представим дробь 1/64 как одну четвёртую в третьей степени:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-19} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3}$$

Теперь можем приравнять показатели:

$2x - 19 = 3$

$2x = 22$

$x = 11$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2\cdot 11-19} = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3} = \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{64}$$

Ответ: 11

Пример 4. Решите уравнение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{8-2x} = 9$$

Представим 1/3 как 3^{-1}, а 9 как 3 в квадрате, получим:

$(3^{-1})^{8-2x} = 3^2$

$3^{-1\cdot(8-2x)} = 3^2$

$3^{-8+2x} = 3^2$

Теперь можем приравнять показатели:

$-8+2x = 2$

$2x = 10$

$x = 5$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{8-2\cdot5} = 9$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$$

$$3^2 = 9$$

$$9 = 9$$

Ответ: 5

5.2 Введение новой переменной

Вводится переменная $y = a^x$ и рассматривается квадратное уравнение относительно новой переменной.

Пример 5. Решите уравнение: $4^x + 2^x — 6 = 0$.

Обозначим 2^x через y.

Тогда $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$.

Поэтому данное уравнение сводится к квадратному уравнению

$y^2 + y — 6 = 0$,

из которого получаем: $y_1 = 2$, $y_2 = — 3$.

Но $y = 2^x$. Значит, если только данное уравнение имеет корни, то они должны удовлетворять либо уравнению $2^x = 2$, либо уравнению $2^x = —3$.

Первое из этих уравнений имеет корень $x = 1$; второе же уравнение корней не имеет, поскольку выражение 2^x не может принимать отрицательных значений.

Итак, мы получили: $x = 1$.

Проверка. При $\boldsymbol{x} = 1$

$4^x + 2^x — 6 = 4^1 + 2^1 — 6 = 0.$

Следовательно, $\boldsymbol{x} = 1$ — корень данного уравнения.

Пример 6. Решите уравнение: $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$.

Решение: используем приведенные выше формулы и подстановку:

$t = 2^x$.

Уравнение принимает вид:

$2t^2 - 5t - 88 = 0$.

Дискриминант полученного квадратного уравнения положителен:

$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-88) = 729 = 27^2 > 0.$

Это означает, что данное уравнение имеет два корня. Находим их:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{729}}{2 \cdot 2} = 8, \\ t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2 \cdot 2} = -5,5. \end{array} \right.$$

Переходя к обратной подстановке, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = -5,5. \end{array} \right.$$

Второе уравнение корней не имеет, поскольку показательная функция строго положительна на всей области определения. Решаем второе:

$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3.$

С учетом сказанного в теореме переходим к эквивалентному уравнению: $x = 3$. Это и будет являться ответом к заданию.

Ответ: $x = 3$.

5.3 Вынесение общего множителя за скобки

Пример 7. Решите уравнение:

$4^{x+1} + 4^x = 320$, вынесем за скобки степень с наименьшим показателем.

$4^x * 4 + 4^x = 320$

$4^x (4 + 1) = 320$

$4^x * 5 = 320$

$4^x = 320 : 5$

$4^x = 64$

$4^x = 4^3$

$x = 3$

Ответ: 3.

Пример 8. Решите уравнение:

$6^{x+1} + 35 * 6^{x-1} = 71$

$6^{x-1} (6^2 + 35) = 71$

$6^{x-1} * 71 = 71$

$6^{x-1} = 71 : 71$

$6^{x-1} = 1$

$6^{x-1} = 6^0$

$x – 1 = 0$

$x = 1$

Ответ: 1.

За скобки выносят член с наименьшим показателем степени. Чтобы найти многочлен, заключенный в скобки, надо каждый член многочлена, стоящего в левой части уравнения, разделить на вынесенный множитель, Деление осуществлять по правилу: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Пример 9. Решите уравнение:

$$3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207.$$

Решение: ограничений на область допустимых значений у уравнения нет, так как подкоренное выражение имеет смысл при любом значении *x* (показательная функция $y = 9^{4-x}$ положительна и не равна нулю).

Решаем уравнение путем равносильных преобразований с использованием правил умножения и деления степеней:

$$3^{x-1} - 3^{x-3} - \sqrt{3^{2x-8}} - 207 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-1} - 3^{x-3} - 3^{x-4} = 207 \Leftrightarrow$$

$$3^x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81}\right) = 207 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x \cdot \frac{23}{81} = 207 \Leftrightarrow 3^x = 3^6 \Leftrightarrow x = 6.$$

Последний переход был осуществлен в соответствии с теоремой.

Ответ: $x = 6$.

5.4 Метод почленного деления

Пример 10. Решите уравнение: $2^x = 3^x$.

Разделив обе части данного уравнения на 3^x (такое деление возможно, поскольку при любом x $3^x > 0$)

Получим: $({}^2/_3)^x = 1$.

Но $1 = ({}^2/_3)^0$, поэтому $x = 0$.

Проверка показывает, что это действительно корень данного уравнения.

Ответ, $x = 0$.

Пример 11. Решите уравнение: $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Решение: обе части исходного уравнения можно поделить на $0{,}2^x$. Данный переход будет являться равносильным, поскольку это выражение больше нуля при любом значении x (показательная функция строго положительна на своей области определения). Тогда уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 12**.** Решите уравнение:

$$3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x.$$

Решение: упрощаем уравнение до элементарного путем равносильных преобразований с использованием приведенных в начале правил деления и умножения степеней:

$$49 \cdot 3^x \cdot 7^x = 49 \cdot 4^x \Leftrightarrow$$

$$21^x = 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{21}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Деление обеих частей уравнения на 4^x, как и в предыдущем примере, является равносильным преобразованием, поскольку данное выражение не равно нулю ни при каких значениях x.

Ответ: $x = 0$.

Пример 13. Решите уравнение:

$$3^x = -x - \frac{2}{3}.$$

Решение: функция $y = 3^x$, стоящая в левой части уравнения, является возрастающей. Функция $y = —x\text{-}2/3$, стоящая в правой части уравнения, является убывающей. Это означает, что если графики этих функций пересекаются, то не более чем в одной точке. В данном случае нетрудно догадаться, что графики пересекаются в точке $x = -1$. Других корней не будет.

Ответ: $x = -1$.

Пример 14. Решите уравнение:

$$18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0.$$

Решение: упрощаем уравнение путем равносильных преобразований, имея в виду везде, что показательная функция строго больше нуля при любом значении x и используя правила вычисления произведения и частного степеней, приведенные в начале:

$$2^x \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 2^x \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^x(3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 0, \\ 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9, \\ 3^x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Задания для проверочной работы.
Вариант 1

1. Найдите корень уравнения $2^{3-2x} = 32$.
2. Найдите корень уравнения $2^{4x-19} = \frac{1}{8}$.

3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-7} = \frac{1}{81}$.
4. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$
5. Найдите корень уравнения $49^{x-5} = \frac{1}{7}$.
6. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{49}\right)^{x-8} = 7$.
7. Найдите корень уравнения: $8^{1+x} = 8$.
8. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{9}\right)^{2+x} = 729$.
9. Найдите решение уравнения: $3^{x-2} - 3^{x-3} = 6$
10. Решите уравнение $9^{x} - 10 \times 3^{x} + 9 = 0$.
11. Решите уравнение $9^{7-1x} = 81^{2x}$.
12. Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 4 + x^{3}$

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $2^{3-4x} = 128$.
2. Найдите корень уравнения $6^{4x-10} = \frac{1}{36}$.
3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x-13} = \frac{1}{64}$.
4. Найдите корень уравнения: $43^{x} = 8^{2x}$
5. Найдите корень уравнения $81^{x-3} = \frac{1}{3}$.
6. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-7} = 2$.
7. Найдите корень уравнения: $2^{-9+x} = 8$.
8. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1+x} = 7$.
9. Найдите решение уравнения: $4^{x-3} + 4^{x} = 65$
10. Решите уравнение $2 \times 9^{x} - 17 \times 3^{x} = 9$.
11. Решите уравнение $3^{3+x} = 9^{3x}$.
12. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = x^{3} + 3$.

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $2^{2-x} = 32$.
2. Найдите корень уравнения $2^{4x-14} = \frac{1}{64}$.

3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-9} = \frac{1}{81}$.
4. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$
5. Найдите корень уравнения $81^{x-4} = \frac{1}{3}$.
6. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{49}\right)^{x-1} = 7$.
7. Найдите корень уравнения: $6^{5+x} = 216$.
8. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{6}\right)^{4+x} = 36$.
9. Найдите решение уравнения: $4^{x-3} + 4^{x} = 65$
10. Решите уравнение $2 \times 9^{x} - 17 \times 3^{x} = 9$
11. Решите уравнение $5^{2+3x} = 25^{2x}$.
12. Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 4 + x^{3}$

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $2^{3-x} = 16$.
2. Найдите корень уравнения $3^{x-18} = \frac{1}{9}$.
3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} = \frac{1}{64}$.
4. Найдите корень уравнения: $43^{x} = 8^{2x}$
5. Найдите корень уравнения $16^{x-3} = \frac{1}{2}$.
6. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-3} = 3$.
7. Найдите корень уравнения: $8^{-1+x} = 512$.
8. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{4}\right)^{1+x} = 4$.
9. Найдите решение уравнения: $3^{x-2} - 3^{x-3} = 6$
10. Решите уравнение $9^{x} - 10 \times 3^{x} + 9 = 0$.
11. Решите уравнение $3^{3-4x} = 9^{2x}$.
12. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = x^{3} + 3$.

Вариант 5

1. Найдите корень уравнения $2^{3-x} = 32$.
2. Найдите корень уравнения $5^{x-7} = \frac{1}{125}$.

3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-6} = \frac{1}{36}$.

4. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$

5. Найдите корень уравнения $9^{x-10} = \frac{1}{3}$.

6. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} = 2$.

7. Найдите корень уравнения: $3^{5+x} = 9$.

8. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+x} = 4$.

9. Найдите решение уравнения: $3^{x-2} - 3^{x-3} = 6$

10. Решите уравнение $2 \times 9^{x} - 17 \times 3^{x} = 9$.

11. Решите уравнение $2^{7+2x} = 8^{3x}$.

12. Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 4 + x^{3}$

6 Решение тригонометрических уравнений

1 способ. Решение уравнений разложением на множители

Пример 1. Найдите корень уравнения:

sin 4x = 3 cos 2x

Для решения уравнения воспользуемся формулой синуса двойного угла $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

2 sin 2x cos 2x – 3 cos 2x = 0,
cos 2x (2 sin 2x – 3) = 0. Произведение этих множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей будет равен нулю.

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi к$, к $\in$ Z или sin 2x = 1,5 – нет решений, т.к $|\sin\alpha| \le 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}к$; к $\in$ Z.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}к$, к $\in$ Z.

2 способ. Решение уравнений преобразованием суммы или разности тригонометрических функций в произведение

Пример 2. Найдите корень уравнения:

cos 3x + sin 2x – sin 4x = 0.

Для решения уравнения воспользуемся формулой $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos 3x + 2\sin\frac{2x-4x}{2}\cos\frac{2x+4x}{2} = 0,$

cos 3x – 2 sin x cos 3x = 0,

cos 3x (1 – 2 sinx) = 0. Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0;\\ 1-2\sin x = 0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}3x = \frac{\pi}{2}+\pi к, к \in Z,\\ 2\sin x = 1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}к, к \in Z,\\ \sin x = \frac{1}{2};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}к, к \in Z,\\ x = (-1)^к\frac{\pi}{6}+\pi к, к \in Z;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}к, к \in Z,\\ x = (-1)^к\frac{\pi}{6}+\pi к, к \in Z;\end{array}\right.$$

Множество решений второго уравнения полностью входит во множество решений первого уравнения. Значит $x = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}к, к \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\kappa, \kappa \in Z.$

3 способ. Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Пример 3. Найдите корень уравнения:

sin 5xcos 3x = sin 6xcos2x.

Для решения уравнения воспользуемся формулой $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x),$$
$$\sin 8x + \sin 2x - \sin 8x - \sin 4x = 0,$$
$$\sin 2x - \sin 4x = 0,$$
$$2\sin(-x)\cos 3x = 0,$$
$$\sin x \cos 3x = 0;$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos 3x = 0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi\kappa, \kappa \in Z\\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pi\kappa, \kappa \in Z\\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\kappa, \kappa \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi\kappa; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3\kappa}, \kappa \in Z$

4 способ. Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

Пример 4. Найдите корень уравнения:

$3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0,$
$3 \sin x - 2 (1 - \sin^2 x) = 0,$
$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0,$

Пусть sin x = t, где $|t| \leq 1$. Получим квадратное уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$,

D = 9 + 16 = 25.

$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$. Таким образом $\begin{array}{l}t_1 = -2;\\ t_2 = \frac{1}{2}\end{array}$. $t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

Значит sin x = $\frac{1}{2}$. Поэтому $x = (-1)^{\kappa}\frac{\pi}{6} + \pi\kappa, \pi \in Z$.

Ответ: $(-1)^{\kappa}\frac{\pi}{6}+\pi\kappa, \kappa \in Z$

Пример 5. Найдите корень уравнения:

$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$

Пусть $\sin x = t$, $| t | \leq 1$. Тогда

$2 t^2 + t - 1 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Откуда $\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa, \kappa \in Z, \\ x = (-1)^{\kappa}\frac{\pi}{6}+\pi\kappa, \kappa \in Z. \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa, (-1)^{\kappa}\frac{\pi}{6}+\pi\kappa, \kappa \in Z$.

Пример 6. Найдите корень уравнения:

$3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0.$

Пусть $\operatorname{tg} x = 1$, тогда получим уравнение $3 t^2 + 2 t - 1 = 0.$

$t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{3}.$

$$\left[\begin{array}{l} tgx = -1, \\ tgx = \frac{1}{3}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4}+\pi\kappa, \\ x = arctg\frac{1}{3}+\pi\kappa, \kappa \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $arctg\frac{1}{3}+\pi\kappa, -\frac{\pi}{4}+\pi\kappa, \kappa \in Z$

Пример 7. Найдите корень уравнения:

$$2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x = 0.$$

$$\cos x\left(2\cos x+\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+\pi\kappa, \kappa \in Z, \\ x = \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi\kappa, \kappa \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi\kappa, \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi\kappa, \kappa \in Z.$

Пример 8. Найдите корень уравнения:

$$\cos 5x - \cos 3x = 0.$$

$$-2\sin x \sin 4x = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 4x = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \pi\kappa, \kappa \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4}\kappa, \kappa \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\pi k, k \in Z.$

Пример 9. Найдите корень уравнения:

$$\sin 3x \cos x = \sin \frac{5}{2} x \cos \frac{3}{2} x.$$

$$\sin 3x \cos x = \sin \frac{5}{2} x \cos \frac{3}{2} x,$$

$$\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin x),$$

$$\sin 2x - \sin x = 0,$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \cos \frac{3x}{2} = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $2\pi k, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} k, k \in Z.$

5 способ. Решение однородных тригонометрических уравнений

Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = 0$, где a и b – некоторые числа, называются однородными уравнениями первой степени относительно sin x или cos x.

Пример 10.

Рассмотрим уравнение

$\sin x - \cos x = 0$. Разделим обе части уравнения на cos x. Так можно сделать, потери корня не произойдёт, т.к. , если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Получим $tg\, x - 1 = 0$.

$tg\, x = 1,$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Уравнения вида $a \sin^2 x + b\cos^2 x + c \sin x \cos x = 0$, где a, b, c –некоторые числа, называются однородными уравнениями второй степени относительно sin x или cos x.

Пример 11. Найдите корень уравнения:

$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 = 0$.

Разделим обе части уравнения на cos x, при этом потери корня не произойдёт, т.к. $\cos x = 0$ не является корнем данного уравнения.

$tg^2 x - 3tg\, x + 2 = 0$.

Пусть tg x = t. D = 9 – 8 = 1.

$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ тогда $t_1 = 2, t_2 = 1$. Отсюда tg x = 2 или tg x = 1.

В итоге x = arctg 2 + πk, x = $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Ответ: arctg 2 + πk, $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Пример 12. Найдите корень уравнения:

$3\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 2$.

Преобразуем правую часть уравнения в виде $2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$.
Тогдаполучим:
$3\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$,
$3\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$,
$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$. (Получили 2 уравнение, которое уже разобрали).

Ответ: arctg 2 + πk, $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

6 способ. Решение линейных тригонометрических уравнений

Линейным тригонометрическим уравнением называется уравнение вида $a \sin x + b\cos x = c$, где a, b, c – некоторые числа.

Пример 13.

Рассмотрим уравнение $\sin x + \cos x = -1$.

Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x) = -1$.

Учитывая, что $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получим:

$$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x) = -1,$$

$$\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1,$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

7 способ. Введение дополнительного аргумента

Выражение *a cos x + b sin x* можно преобразовать:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right).$$

(это преобразование мы уже ранее использовали при упрощении тригонометрических выражений)

Введём дополнительный аргумент – угол α такой, что $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}.$

Тогда $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$

Пример 14.

Рассмотрим уравнение: 3 sinx + 4 cosx = 1.

Учтём, что $\sqrt{3^2+4^2} = 5$. Тогда получим $5(0{,}6\sin x + 0{,}8\cos x) = 1,$

0,6 sin x + 0,8 cosx = 1. Введём дополнительный аргумент – угол α такой, что $\begin{cases} \cos\alpha = 0{,}6 \\ \sin\alpha = 0{,}8 \end{cases}$, т.е. α = arcsin 0,6. Далее получим

$$\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x = 1.$$
$$\sin(x+\alpha) = 1,$$
$$x + \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$$
$$x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$$
$$x = -\arcsin 0{,}8 + \frac{\pi}{2} + \pi k, \pi \in Z.$$

Ответ: – arcsin 0,8 + $\frac{\pi}{2}$ + $\pi k, k \in Z.$

8 способ. Уравнения вида P(sinx+cosx, sinxcosx)

Такого рода уравнения удобно решать при помощи введения вспомогательной переменной t = sin x ± cosx. Тогда 1 ± 2 sinx cosx = t^2.

Пример 15. Решить уравнение: sinx + cosx + 4 sinx cosx – 1 = 0.

Введём новую переменную t = sinx + cosx, тогда $t^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ Откуда sin x cos x = $\frac{t^2-1}{2}$. Следовательно получим:

$t + 2(t^2 - 1) - 1 = 0.$
$2t^2 + t - 2 - 1 = 0,$
$2t^2 + t - 3 = 0$

Решив уравнение, получим $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{3}{2}$.

$\sin x + \cos x = 1$ или $\sin x + \cos x = -\frac{3}{2}$

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1,$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2},$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Корней нет.

Ответ: $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$

9 способ. Решение уравнений, содержащих тригонометрические функции под знаком радикала.

Пример 16. Решить уравнение: $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x.$

В соответствии с общим правилом решения иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$, запишем систему, равносильную исходному уравнению: $\begin{cases} 1 - \cos x = \sin^2 x, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$

Решим уравнение $1 - \cos x = 1 - \cos^2 x$.

$1 - \cos x = 1 - \cos^2 x,$
$1 - \cos x - (1 - \cos x)(1 + \cos x) = 0,$
$(1 - \cos x)(1 - 1 - \cos x) = 0,$
$-(1 - \cos x)\cos x = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} 1-\cos x = 0, \\ \cos x = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Условию $\sin x \geq 0$ удовлетворяют только решения $\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z. \end{array}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi k, k \in Z.$

10 способ. Решение уравнений с использованием ограниченности тригонометрических функций y = sin x и y = cos x.

Пример 17. Решить уравнение: sin x + sin 9x = 2.
Так как при любых значениях x sin x $\leq$ 1, то данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ 9x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi}{9}k, k \in Z. \end{cases}$

Решение системы $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

Задания для проверочной работы

Вариант 1

1. Решите уравнение $\cos 2x - 1 = 0$.

2. Решите уравнение $2\sin 3x = -1$.

3. Решите уравнение $ctg\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{3}$.

4. Решите уравнение $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{2x}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

5. Решите уравнение $\cos\left(\pi - \dfrac{5x}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Решите уравнение $2\sin^2 x - 7\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 5 = 0$.

7. Решите уравнение $\cos(2\pi - 2x) + 3\sin(\pi - x) = 2$.

8. Решить уравнение $2\sin(3\pi - x) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$

9. Решить уравнение $\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x = 0$.

10. Решить уравнение $4\sin^2 x - 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sin x = 3$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $ctg\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) - \sqrt{3} = 0$.

2. Решите уравнение $2\cos 2x = -1.$

3. Решите уравнение $15\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$.

4. Решите уравнение $\sin 2x\cos 2x = -\frac{1}{4}$.

5. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$.

6. Решите уравнение $3\sin^2(2\pi - 2x) + 7\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 3 = 0$.

7. Решите уравнение $4 + 5\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 2\sin^2(4\pi - x) = 0$

8. Решить уравнение $\sin(3\pi - 2x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 0.$

9. Решить уравнение $4\sin^2(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 3$.

10. Решить уравнение $6\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin\left(\pi - 2x\right) - \cos^2\left(\pi - x\right) = 2$.

Заключение

Теорема Пифагора — важнейшее уравнение в геометрии, которое связывает ее с алгеброй и является основой тригонометрии. Без него было бы невозможно создать точную картографию и навигацию.Триангуляция используется и по сей день, чтобы точно определить относительное расположение для GPS навигации.

Нормальное распределение - уравнение является основой современной статистики. Естественные и социальные науки не могли бы существовать в своей нынешней форме без него.Используется в клинических испытаниях для определения эффективности лекарств по сравнению с отрицательными побочными эффектами.

Волновое уравнение - дифференциальное уравнение, описывающее поведение волн.Волны исследуются с целью определения времени и места землетрясений, а также для прогнозирования поведения океана.Нефтяные компании используют взрывчатку, а затем считывают данные от последующих звуковых волн для определения геологических формаций.

Уравнения Навье—Стокса.В левой части уравнения — ускорение небольшого количества жидкости, в правой — силы, которые воздействуют на него.Как только компьютеры стали достаточно мощными, чтобы решить это уравнение, они открыли сложную и очень полезную области физики. Она особенно полезна для создания более качественной аэродинамики у транспортных средств. Уравнение помогло в усовершенствовании современных пассажирских самолетов.

Уравнения Максвелла - описывают электромагнитное поле и его связь с электрическими зарядами и токами в вакууме и сплошных средах.Помогли в понимании электромагнитных волн, что способствовало созданию многих технологий, которые мы используем сегодня.Современное использование: радар, телевидение и современные средства связи.

Нелинейное уравнение Шрёдингера - описывает материю как волну, а не как частицу. Перевернуло представления физиков — частицы могут существовать в диапазоне возможных состояний.Современное использование: существенный вклад в использование полупроводников и транзисторов, и, таким образом, в большинство современных компьютерных технологий.

В мире существует множество важных уравнений и формул, которые изменили судьбу человечества в целом и нашу личную жизнь в частности. Среди них, модель Ходжкина—Хаксли, Фильтр Калмана и, конечно, уравнение поисковой системы Google.

Будьте математически грамотны, учитесь решать уравнения.

Список использованных источников

1 Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2006. - 384 с.: ил.

2 Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. В 2 ч Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. .Г Мордкович. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 399с.: ил.

3 Дадаян А. А. Математика: Учебник. – М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2005. – 552 с.

4 Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа 10 кл. Базовый уровень: учеб. для общеобразоват. учреждений / Башмаков М. И. – М.: Дрофа, 2008. - 286, [2] с.: ил.

5 http:// www.starmission.ru